Prof. : Mohamed CH-CHAOUI
SMIA; 2020

TD 1

Exercice 1 Quelques inégalités pratiques

1. Montrer que toute fonction continue par morceux sur un segment $[a,\, b]$ est bornée sur $[a,\, b]$.
2. Prouver que si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,\, b]$, alors on a :

$$\left|\int_a^b f\,g\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |\,f\,| \int_a^b |\,g\,| \quad \textbf{(Inégalité de la moyenne)}$$

3. Déduire pour une fonction f continue par morceaux sur $[a,\, b]$ on a :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |\,f\,|\,.$$

4. Montrer que si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,\, b]$ on a :

$$\left(\int_a^b f\,g\right)^2 \leqslant (\int_a^b f^2).(\int_a^b g^2) \ \textbf{(Inégalité Cauchy Schwarz)}$$

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g(x^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \ \textbf{(Inégalité de Minkowski)}$$

Exercice 2 Somme de Riemann
Calculer la limite des suites suivantes à l'aide des intégrales.

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+0} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n-1}$$

$$B_n = \frac{1}{n}\left(\sin(\frac{\pi}{n}) + \sin(\frac{2\pi}{n}) + \ldots + \sin(\frac{n\pi}{n})\right)$$

$$C_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right)$$

$$D_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}.$$

Exercice 3 Limite de fonctions définies par une intégrale
À l'aide de majoration simple, trouver la limite des suites $(n \to +\infty)$:

1. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+e^{nx}}\,dx$
2. $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(nx)\,dx$
3. $I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}(1+x^n)\,dx$

4. $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_n^{2n} \arctan(x)dx$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{-2x}^{2x} \cos(t^4)\,dt$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \int_{x}^{2x} \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2}\,dt$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$

Exercice 4 Etude d'une fonction définie par un intégrale

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \int_x^{4x} e^{-t^2}\,dt$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Déterminer la dérivée de F et en déduire ses variations.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine.

Exercice 5 Lemme de Gronwall

Soient deux fonctions f et g continues et positives sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose que

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \leqslant C + \int_0^x f(t)g(t)\,dt,$$

où C est une constante strictement positive.

Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \leqslant C \exp\left(\int_0^x g(t)\,dt,\right).$$

Ce résulat est très utile pour étudier les équations différentielles.